# Официальные решения заданий конкурса

# Вариант заданий для 7-8 классов

## Математика

**1**. Обозначим количество арбузов у соседа через $x$, тогда количество арбузов у внука составляет $x+15$. Из условия задачи

$$x + (x+15) + 29 = 60,$$

$$2x = 16,$$

$$x = 8.$$

*Ответ: дедушка отдал соседу 8 арбузов.*

**2**. *Первый способ.* Обозначим количество цветов на клумбе через $n$. Поскольку количество роз и ромашек должно быть целым, $\frac{7}{24}n$ и $\frac{5}{18}n$ – натуральные числа. Так как $\frac{7}{24}$ – несократимая дробь, то число цветов на клумбе делится на $24$. Поэтому выпишем все числа, которые делятся на $24$ и лежат в промежутке от $100$ до $200$:

$$120, \quad 144, \quad 168, \quad 192.$$

Аналогично $\frac{5}{18}$ – несократимая дробь, следовательно, число цветов на клумбе делится на $18$. В данном промежутке подходят числа

$$108, \quad 126, \quad 144, \quad 162, \quad 180, \quad 198.$$

Из всех перечисленных чисел нас интересуют только те, которые находятся в обоих списках. Такое число одно – 144.

*Второй способ.* Из таких же рассуждений получаем, что количество цветов на клумбе делится на $24$ и на $18$. То есть это число делится на наименьшее общее кратное $24$ и $18$, которое равно НОК$(24; 18) = 72$. При этом количество цветов лежит в промежутке от $100$ до $200$. Единственный подходящий вариант $n = 2 \cdot 72 = 144$.

*Ответ: на клумбе 144 цветка.*

**3**. *Первый способ.* Упростим записанное выражение:

$$a^2+2ab+b^2-(c-d)(c-d)-(a+b+c-d)(a+b-c+d)+10d=$$
$$=a^2+2ab+b^2-(c^2-2cd+d^2)-(a^2+ab-ac+ad+ab+b^2-bc+$$
$$+bd+ca+cb-c^2+cd-ad-db+cd-d^2)+10d=$$
$$=a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2-(a^2+b^2+2ab-c^2-d^2+2cd)+10d=10d.$$

*Второй способ.* Заметим, что можно применить формулы разности квадратов и квадрата суммы:

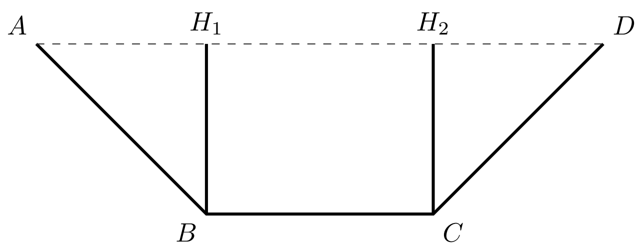
$$a^2+2ab+b^2-(c-d)(c-d)-(a+b+c-d)(a+b-c+d)+10d=$$
$$=(a+b)^2-(c-d)^2-((a+b)+(c-d))\cdot((a+b)-(c-d))+10d=$$
$$=(a+b)^2-(c-d)^2-((a+b)^2-(c-d)^2)+10d=10d.$$

Видно, что ответ зависит только от количества оценок “отлично”. И при подстановке $d=10$ получается 100 у.е.

*Ответ: 1) Максим получит 100 условных единиц.*

*2) размер награды зависит только от количества оценок “отлично”.*

**4**.




Проведём в данной равнобокой трапеции $ABCD$ высоты $BH_1$ и $CH_2$ к большему основанию. Тогда $BH_1H_2C$ – прямоугольник и $H_1H_2=BC$. Поскольку трапеция равнобокая, $AB=CD$ и $\angle BAH_1=\angle CDH_2$. Отсюда прямоугольные треугольники $ABH_1$ и $CDH_2$ равны по двум углам и стороне. Значит, $AH_1=H_2D$.

Воспользовавшись условием, получаем, что:

$$BH_1=h=3,$$
$$H_1H_2=BC=d=4,$$
$$AD=AH_1+H_1H_2+H_2D=l=10,$$
$$AH_1=\frac{AD-H_1H_2}{2}=3.$$

Получается, что прямоугольный треугольник $AH_1B$ имеет два равных катета $AH_1=BH_1$, следовательно, $\angle ABH_1=45°$. Так как $BH_1H_2C$ – прямоугольник, $\angle H_1BC=90°$. Таким образом

$\angle ABC = \angle ABH_1 + \angle H_1BC = 135°$.

*Ответ: угол между стенкой и дном траншеи составляет* $135°$.

**5**. Обозначим количество баллов за первое, второе, третье и четвертое место через $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ соответственно, сумму всех баллов в одном этапе через $A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, количество этапов через $n$. Тогда общее число баллов всех участниц составляет $nA$. Можно заметить, что это число должно раскладываться в произведение двух натуральных чисел.

Общее число баллов всех девочек составляет $16 + 14 + 13 + 12 = 55$. Число $55$ можно разложить на два множителя двумя способами: либо $1 \cdot 55$, либо $5 \cdot 11$. Отсюда для количества этапов $n$ возможно 4 варианта:

(a) $n = 1$ и $A = 55$.

Данный случай невозможен, ведь этапов должно быть несколько.

(b) $n = 5$ и $A = 11$.

Пусть $a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = 3$ и $a_1 = 5$. У первой участницы было $(5,\ 5,\ 3,\ 2,\ 1)$ баллов, у второй – $(1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 2)$, у третьей – $(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 5)$, у четвертой – $(2,\ 3,\ 1,\ 3,\ 3)$. При таком распределении баллов условия задачи выполняются и $A = 11$.

(c) $n = 11$ и $A = 5$.

Пусть $a_4 = a_3 = a_2 = 1$ и $a_1 = 2$. У первой участницы было $(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ баллов, у второй – $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$, у третьей – $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1)$, у четвертой – $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2)$. При таком распределении баллов условия задачи выполняются и $A = 5$.

(d) $n = 55$ и $A = 1$.

Однако сумма четырех натуральных чисел не может равняться $1$. Другими словами, этот случай тоже невозможен.

*Ответ: количество этапов в конкурсе либо* $5$*, либо* $11$.

# Физика

**1**. 1) Обозначим через $x$ расстояние между почтовым отделением и домом адресата. Тогда путь от почты до дома адресата и обратно до почты равен $2x$. Из условия мы знаем, что в первый час Андрей прошёл 75% пути, или же $0,75x$. Тогда за второй час он проехал расстояние $2x - 0,75x = 1,25x$. Так как скорость за второй час движения $v_2 = 25$ км/ч, получаем:

$$1,25x = v_2 \cdot t_2 = 25 \text{ км/ч} \cdot 1 \text{ ч}.$$

Из данного уравнения получаем $x = 20$ км.

2) Предположим, что скорость Андрея в первый час равна $v_1$. Тогда

$$v_1 \cdot 1 \text{ ч} = 0,75x = 15 \text{ км},$$
$$v_1 = 15 \text{ км/ч}.$$

3) Путь, по определению, является расстоянием, которое проехал Андрей. Перемещение – это длина отрезка прямой между точкой начала и точкой конца. Полагая, что движение было прямолинейным, за первый час путь и перемещение совпадают и равны $0,75x = 15$ км. Путь, который проехал Андрей за второй час, равен $1,25x = 25$ км, а его перемещение составляет $0,75x - 0 = 0,75x = 15$ км. За два часа его путь составляет $2x = 40$ км, а перемещение равно $0$, поскольку он вернулся в начальное положение, на почту.

*Ответ: 1) расстояние между адресатом и почтой равно* 20 *км.*

*2) в первый час Андрей ехал со скоростью* 15 *км/ч.*

*3) а) за первый час путь равен* 15 *км и перемещение* 15 *км.*

*б) за второй час путь равен* 25 *км, а перемещение* 15 *км.*

*в) за два часа путь равен* 40 *км, а перемещение* 0 *км.*

**2**. *Обозначим объём бассейна через $V = 5 \cdot 3 \cdot 1,5 = 22,5$ м$^3$, начальную температуру воды в бассейне – $T_1 = 12°C$, температуру воды после нагрева – $T_2 = 17°C$, плотность воды – $\rho$, удельную теплоёмкость воды – $c$.*

Воспользуемся формулой связи количества теплоты с изменением температуры:

$$Q_1 = cm(T_2 - T_1) = c\rho V(T_2 - T_1) = 4200 \cdot 1000 \cdot 22,5 \cdot (17 - 12) = 472,5 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Если бассейн заполнен только на треть, то $V_2 = V/3$. При условии, что воде было передано столько же энергии, $Q_2 = Q_1$, можем найти температуру $T_3$, до которой нагрелась вода в этом случае:

$$c\rho\frac{V}{3}(T_3 - T_1) = Q_2 = Q_1 = c\rho V(T_2 - T_1),$$

$$T_3 - T_1 = 3(T_2 - T_1),$$

$$T_3 = 3T_2 - 2T_1 = 27\ ^\circ\text{C}.$$

*Ответ: 1) вода получила* $472,5$ *МДж тепла.*

*2) в случае, когда бассейн заполнен на треть, вода нагреется до* $27^\circ$ *C.*

**3**. Для удобства и дальнейшего анализа отметим точки из таблицы на графике зависимости силы $F$ от расстояния $x$ (рис. 1).

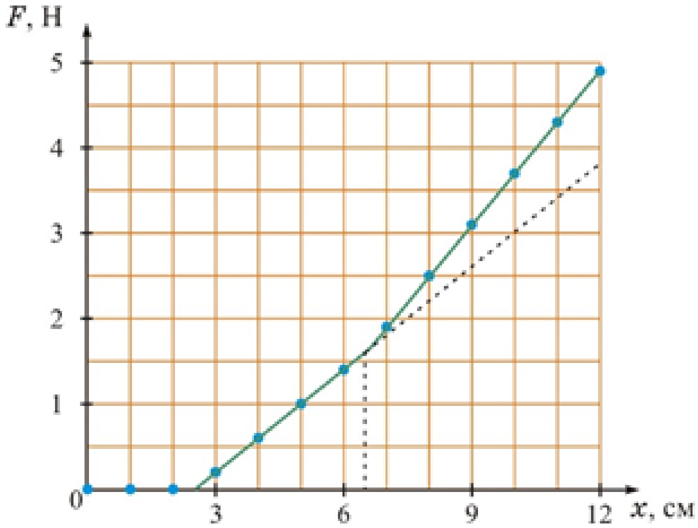



Рис. 1: График зависимости приложенной силы от расстояния, на которое оттянут крючок.

Видно, что через данный набор точек можно провести три прямых, что соответствует трём разным коэффициентам жесткости. Из закона Гука, коэффициент жесткости $k = F/x$, что соответствует коэффициентам наклона прямых на графике. На промежутке от $0$ см до $2,5$ см коэффициент жесткости $k_1 = 0$. На промежутке от $2,5$ см до $6,5$ см коэффициент жёсткости $k_2 = 0,4$ Н/см, на промежутке от $6,5$ см до $12$ см коэффициент жёсткости $k_3 = 0,6$ Н/см.

1) Так как $k_1 = 0$, при изменении $x$ от $0$ до $2,5$ см конструкция не испытывает натяжения.

2) Увеличение коэффициента жесткости с $k_2$ до $k_3$ может объясняться наличием параллельного соединения двух фрагментов нити.

3) Положим, что есть параллельное соединение двух нитей с длинами $l_a$ и $l_b$ и коэффициентами жесткости $k_a$ и $k_b$ соответственно. Чтобы только одна из нитей растягивалась в промежутке от $2,5$ см до $6,5$ см, длины должны отличаться на $6,5 - 2,5 = 4$ см, а коэффициент $k_a = k_2$.

Воспользуемся формулой для жесткости двух нитей, соединенных параллельно:

$$k_a + k_b = k_3,$$
$$k_b = k_3 - k_2 = 0,2 \text{ Н/см}.$$

Вспомним формулу связи коэффициента жесткости с модулем Юнга

$$k = \frac{S \cdot E}{l_0},$$

где $S$ – площадь поперечного сечения, $E$ – модуль Юнга, $l_0$ – длина нити в недеформированном состоянии. Площади сечения нитей и их модули Юнга одинаковы. Заметим, что $k_b = \frac{k_a}{2}$. Отсюда следует, что нить длиной $l_a$ в два раза короче нити с длиной $l_b$. Из данных условий, получаем следующую систему на длины нитей $l_a$ и $l_b$:

$$\begin{cases} l_b - l_a = 4 \text{ см}, \\ l_b = 2l_a. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_a = 4 \text{ см}, \\ l_b = 8 \text{ см}. \end{cases}$$

На основе всего вышеперечисленного, в начальный момент времени конструкция могла быть следующей:

Соединим нити с длинами $4$ и $8$ см. Пусть $A$ и $B$ – точки соединения нитей. Закрепим точку соединения $A$ к левому краю трубки, а точку соединения $B$ расположим на расстоянии $4 - 2,5 = 1,5$ см по горизонтали от точки $A$. Точку $B$ соединим с нерастяжимой нитью, которая другим концом соединена с крючком.