Официальные решения заданий конкурса ШФ-2020

Вариант №3, рассчитан на 9 класс и старше

Математика

Задача №1

Определим, сколько сахара можно получить из 7 200 кг тростника:

$$\begin{array}{ll} 7200 - & 100\% \\ x \quad - & \quad 18\% \end{array}$$

Отсюда получим: $x = \dfrac{7200 \cdot 18}{100} = 72 \cdot 18 = 1296$ кг.

Найдём теперь, сколько нужно свёклы, чтобы получить 1 296 кг сахара:

$$\begin{array}{ll} y \quad - & \quad 100\% \\ 1296 - & \quad 25\% \end{array}$$

Отсюда получим: $y = \dfrac{1296 \cdot 100}{25} = 1296 \cdot 4 = 5184$ кг.

Ответ: 5 184 кг.

Задача №2

Пусть в первом ящике – x апельсинов, во втором – y, а в третьем – z. Получаем систему уравнений:

$$x + y + z = 32\frac{3}{4}$$

$$x + y = 25\frac{7}{8}$$

$$y + z = 22\frac{3}{4}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$z = 32\frac{3}{4} - 25\frac{7}{8} = 32 - 25 + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = 7 + \frac{6}{8} - \frac{7}{8} = 7 - \frac{1}{8} = 6 + \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = 6 + \frac{7}{8} = 6\frac{7}{8} \text{(кг)}.$$

Теперь из третьего уравнения найдём y:

$$y = 22\frac{3}{4} - 6\frac{7}{8} = 22 - 6 + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = 16 + \frac{6}{8} - \frac{7}{8} = 16 - \frac{1}{8} = 15 + \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = 15 + \frac{7}{8} = 15\frac{7}{8} \text{(кг)}.$$

Из второго уравнения системы находим x:

$$x = 25\frac{7}{8} - 15\frac{7}{8} = 25 - 15 + \frac{7}{8} - \frac{7}{8} = 25 - 15 = 10 \text{(кг)}.$$

Ответ: в первом ящике – 10 кг, во втором ящике – $15\frac{7}{8}$ кг, в третьем ящике – $6\frac{7}{8}$ кг.

Задача №3

Обозначим скорость катера в стоячей воде как $V_К$ км/ч. Так как скорость течения равна 2 км/ч, то $V_К > 2$. Скорость катера по течению равняется ($V_К + 2$) км/ч, а против течения – ($V_К - 2$) км/ч. Время движения катера по течению реки составляет $t_1 = \frac{32}{V_К + 2}$ часов, время движения против течения реки – $t_2 = \frac{60}{V_К - 2}$ часов. Общее время катера в пути $t_1 + t_2 = 3$ часа. Поэтому

$$\frac{32}{V_К + 2} + \frac{60}{V_К - 2} = 3;$$

$$\frac{32\left(V_К - 2\right) + 60\left(V_К + 2\right)}{V_К^{\,2} - 4} = 3;$$

$$32V_К - 64 + 60V_К + 120 = 3\left(V_К^{\,2} - 4\right);$$

$$-3V_К^{\,2} + 92V_К + 68 = 0;$$

$$3V_К^{\,2} - 92V_К - 68 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 92^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-68) = 8464 + 816 = 9280;$$

$$V_К = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{92 \pm \sqrt{9280}}{6} = \frac{92 \pm 8\sqrt{145}}{6} = \frac{46 \pm 4\sqrt{145}}{3}.$$

Корень $V_К = \frac{46 - 4\sqrt{145}}{3} \approx -0,72$ отрицательный, а $V_К > 2$. Поэтому $V_К = \frac{46 + 4\sqrt{145}}{3} \approx 31,4$.

Ответ: скорость катера равна $V_К = \frac{46 + 4\sqrt{145}}{3}$ км/ч.

Задача №4

Построим треугольник ABC (рис. 1).

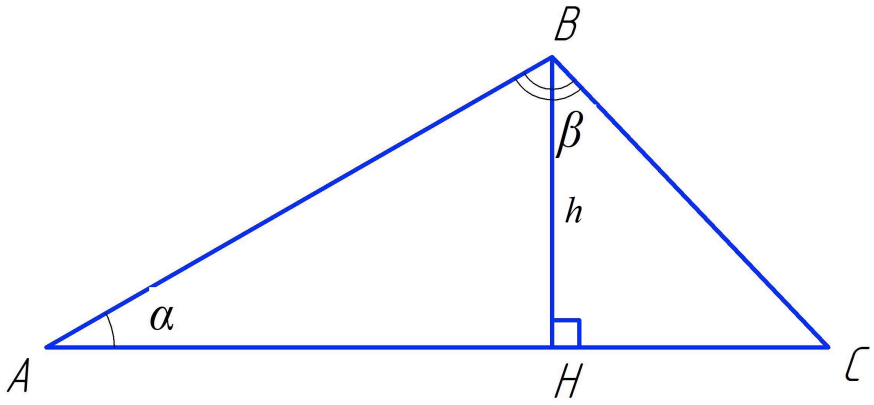

Рис. 1

Его площадь вычислим по формуле $S = \frac{1}{2} AC \cdot h$. AC найдём, сложив $AH + HC$.

1) Из ΔABC по определению котангенса $ctg\alpha = \frac{AH}{BH} = \frac{AH}{h}$. Следовательно, $AH = h \cdot ctg\alpha$.

2) Так как сумма углов треугольника равна 180º, $\angle ACB = 180° - (\alpha + \beta)$.

Из ΔBHC $ctg\angle HCB = \frac{HC}{BH}$. Поэтому $HC = BH \cdot ctg\angle ACB = h \cdot ctg\angle ACB = h \cdot ctg\left(180° - (\alpha + \beta)\right)$.

3) $AC = AH + HC = h \cdot ctg\alpha + h \cdot ctg\left(180° - (\alpha + \beta)\right) = h\left(ctg\alpha - ctg(\alpha + \beta)\right)$. Подставив последнее выражение в формулу для площади, получим: $S = \frac{1}{2} \cdot h\left(ctg\alpha - ctg(\alpha + \beta)\right) \cdot h = \frac{h^2 \cdot \left(ctg\alpha - ctg(\alpha + \beta)\right)}{2}$.

Можно выражение для площади оставить в таком виде, а можно преобразовать, воспользовавшись формулой котангенса суммы двух углов: $ctg\left(\alpha + \beta\right) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$.

Тогда $S = \frac{h^2}{2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \left(ctg\alpha + ctg\beta\right)}$.

Ответ: $S = \frac{h^2 \cdot \left(ctg\alpha - ctg(\alpha + \beta)\right)}{2} = \frac{h^2}{2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \left(ctg\alpha + ctg\beta\right)}$.

Задача №5

Построим пирамиду *SABCD* (рис. 1).

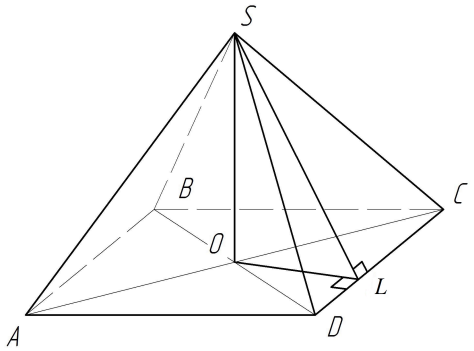

Рис. 1

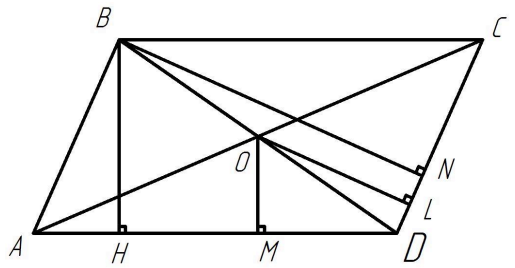

Рис. 2

1) $\Delta ASD = \Delta BSC$ по трём сторонам ($AD = BC$, $SD = BS$ и $SA = SC$), аналогично и $\Delta ABS = \Delta DSC$. $SD = BS$, так как $\Delta SBO = \Delta OSD$ по двух сторонам и углу между ними ($BO = OD$, SO – общая сторона, $\angle BOS = \angle SOD = 90°$). $SA = SC$, так как $\Delta SAO = \Delta OSC$. Эти треугольники равны также по двум сторонам и углу между ними. Значит, площадь боковой поверхности пирамиды $S_Б = 2 \cdot \left(S_{ASD} + S_{DSC}\right)$.

2) Площадь грани *DSC* равна $S_{DSC} = \frac{1}{2} SL \cdot DC$, где *SL* – высота ΔDSC, опущенная к стороне *DC*. Из ΔSOL по теореме Пифагора $SL = \sqrt{OL^2 + OS^2}$.

Так как $SL \perp DC$ и $SO \perp DC$, то по теореме о трёх перпендикулярах $OL \perp DC$. Рассмотрим параллелограмм *ABCD* (рис. 2). Его площадь равна $S_{ABCD} = BH \cdot AD = BN \cdot CD$, поэтому $BN = \frac{S_{ABCD}}{DC} = \frac{90}{10} = 9$ (м). В ΔDBN $BN \perp DC$ и $OL \perp DC$, значит $OL \parallel BN$. Но *OL* проходит через точку O – середину *BD*, а поэтому по теореме Фалеса точка *L* – середина *DN*. Поэтому *OL* – средняя линия ΔDBN и $OL = \frac{1}{2} BN = \frac{9}{2}$ м.

$$SL = \sqrt{OL^2 + OS^2} = \sqrt{\frac{9^2}{2^2} + 6^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 36} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ (м)}$$

$$S_{DSC} = \frac{1}{2} SL \cdot DC = 7,5 \cdot 5 = 37,5 (\text{м}^2).$$

3) В ΔASD проведём высоту *SM* (на рис. 1 она не показана) к стороне *AD,* тогда $S_{ASD} = \frac{1}{2} SM \cdot AD$. Аналогично пункту 2) получаем, что $SM = \sqrt{OM^2 + OS^2}$, $OM \perp AD$, $BH = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{90}{18} = 5$ (м), *OM* – средняя линия ΔHBD, $OM = \frac{1}{2} BH = \frac{5}{2}$м,

$$SM = \sqrt{OM^2 + OS^2} = \sqrt{\frac{5^2}{2^2} + 6^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 36} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2} = 6,5 \text{ (м)};$$

$$S_{ASD} = \frac{1}{2} SM \cdot AD = 6,5 \cdot 9 = 58,5 \text{ (м}^2).$$

4) $S_Б = 2 \cdot \left(S_{ASD} + S_{DSC}\right) = 117 + 75 = 192$ (м^2).

Ответ: 192 м^2.

Задача №6

9-значных чисел, в записи которых каждая цифра от 1 до 9 встречается один раз, будет 9! = 362 880, что является чётным числом. Поэтому разобьём все эти числа на пары, каждая из которых состоит из некоторого 9-значного числа и 9-значного числа, каждая цифра которого равна 10 минус цифра первого числа в том же разряде. Приведём примеры:

1 2 3 4 5 6 7 8 9	7 8 4 6 1 2 4 5 3	8 6 2 7 9 3 5 4 1
9 8 7 6 5 4 3 2 1	3 2 6 4 9 8 6 5 7	2 4 8 3 1 7 5 6 9

Сумма любой такой пары равна 1 111 111 110. Всего этих пар существует $\frac{9!}{2} = \frac{362880}{2} = 181440$. Поэтому сумма всех 9-значных чисел, рассматриваемых в этой задаче, равняется

$$181\,440 \cdot 1\,111\,111\,110.$$

Полученная сумма делится на 111 111 111, что и требовалось доказать.

Физика

Задача №1

За 8 мин 20 с = 500 с голова поезда проехала 3 400 м по мосту и 100 м после моста. Такое же расстояние прошли и остальные точки поезда. Поэтому скорость поезда равна

$$V = \frac{3400 + 100}{500} = \frac{3500}{500} = 7 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: 7 м/с.

Задача №2

Электрическая цепь, рассматриваемая в задаче, имеет следующий вид.

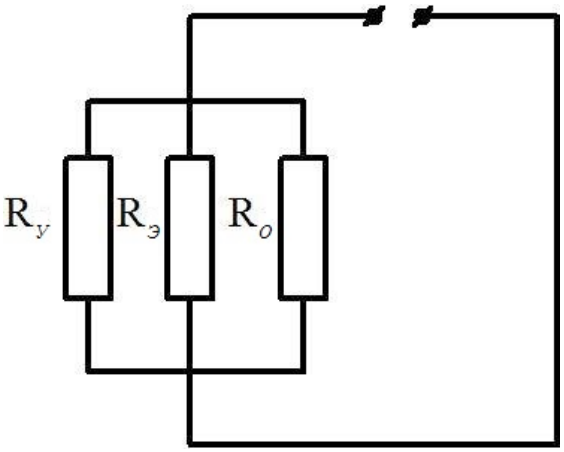

Рис. 1

Здесь $R_У$ = 50 Ом, $R_Э$ = 40 Ом, $R_О$ = 25 Ом – это сопротивления утюга, электрочайника и обогревателя соответственно.

Так как приборы соединены параллельно, $U_У = U_Э = U_О$ = 220 В, то есть напряжению в розетке. Мощность тока в каждом приборе найдём по формуле $P = \frac{U^2}{R}$. Поэтому

$$P_у = \frac{U^2}{R_у} = \frac{220^2}{50} = 968 \text{ (Вт)}, \quad P_э = \frac{U^2}{R_э} = \frac{220^2}{40} = 1210 \text{ (Вт)}, \quad P_о = \frac{U^2}{R_о} = \frac{220^2}{25} = 1936 \text{ (Вт)}.$$

Мощность тока в цепи равна сумме мощностей всех приборов в ней: $P = P_у + P_э + P_о = 968 + 1210 + 1936 = 4114$ (Вт).

Ответ: $P_у = 968$ Вт, $P_э = 1210$ Вт, $P_о = 1936$ Вт, $P = 4114$ Вт.

Задача №3

Считаем воздух в комнате идеальным газом. Он подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT, \qquad (1)$$

где P, V, ν и T – давление, объём, количество вещества и температура воздуха соответственно, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – универсальная газовая постоянная.

Из уравнения (1)

$$\nu = \frac{PV}{RT}.$$

Массу воздуха в комнате найдём по формуле $m = M\nu$, где $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$. В итоге получим:

$$m = \frac{PV}{RT} \cdot M. \qquad (2)$$

Объём воздуха в комнате равен

$$V = V_K - V_м,$$

где V_K – объём комнаты, $V_м$ – объём мальчика. Объём комнаты равен произведению её высоты, ширины и длины: $V_K = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ (м^3). По условию, $V_м = 50$ л. Так как 1 л = 1 дм^3 = 0,001 м^3, $V_M = 50 \cdot 0,001 = 0,05$ (м^3). Следовательно,

$$V_B = 60 - 0,05 = 59,95 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Температуру воздуха следует перевести в Кельвины, потому что $[R] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$. Для этого к значению температуры в Цельсиях прибавим 273: $T = 20 + 273 = 293$ (К).

Проверим размерность:

$$[m] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\cdot\text{К}} \cdot \frac{\text{г}}{\text{моль}} = \frac{\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^3}{\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}} \cdot \frac{\text{г}}{\text{моль}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{моль}}} \cdot \frac{\text{г}}{\text{моль}} = \text{моль}\cdot\frac{\text{г}}{\text{моль}} = \text{г}.$$

Подставим численные значения:

$$m = \frac{10^5 \cdot 59,95}{8,31 \cdot 293} \cdot 29 \approx 71403\,\text{г} \approx 71,4\,\text{кг}.$$

По условию, масса мальчика равна 50 кг. Поэтому масса воздуха в комнате больше массы мальчика.

Ответ: масса воздуха в комнате больше массы мальчика.

Задача №4

Введём систему координат XY (рис. 1). Известно, что центр тяжести фигуры, составленной из двух частей, лежит на прямой, соединяющей центры тяжести этих частей. Поэтому центр тяжести уголка будет лежать на прямой C_1C_2, где C_1 и C_2 – центры тяжести первого и второго стержня соответственно.

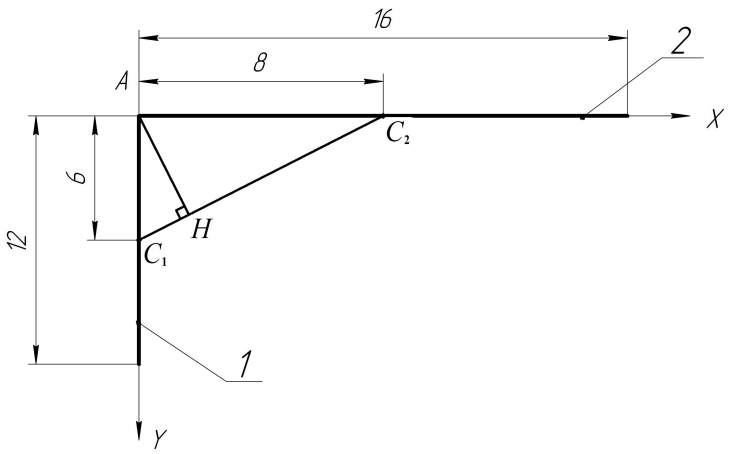

Рис. 1

1) Расстояние от точки A до прямой C_1C_2 – это перпендикуляр AH. Площадь прямоугольного треугольника можно определить двумя способами:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \text{ и } S = \frac{h \cdot c}{2}, \qquad (1)$$

где a, b – катеты, c – гипотенуза, h – высота, проведённая к гипотенузе.

Если приравнять правые части формул (1), получим $\mathrm{h} = \frac{a \cdot b}{c}$.

Найдём C_1C_2 из ΔAC_1C_2 по теореме Пифагора:

$\mathrm{C_1C_2} = \sqrt{\mathrm{AC_1}^2 + \mathrm{AC_2}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

Следовательно, $\mathrm{AH} = \mathrm{h} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ (см). Поэтому минимальное расстояние от точки A до центра тяжести угольника равно 4,8 см.

Расстояние AC будет максимальным, когда точка C совпадёт с точкой C_2. Тогда $AC = 8$ см. Это произойдёт, если масса стержня 2 намного больше массы стержня 1. Например, если стержень 2 будет изготовлен из осмия (его плотность равна $\rho = 22,6 \cdot 10^3$ кг/м^3) или иридия ($\rho = 22,4 \cdot 10^3$ кг/м^3), а стержень 1 – из аэрогеля ($\rho = 1$ кг/м^3) или пробки ($\rho = 240$ кг/м^3).

2) *Первый способ.*

Известно, что алгебраическая сумма моментов сил тяжести относительно центра тяжести (ЦТ) тела равна нулю:

$$M_1 + M_2 = 0, \qquad (1)$$

где $M_1 = m_1 g \cdot HC_1$ – момент сил тяжести стержня 1, $M_2 = -m_2 g \cdot HC_2$ – момент сил тяжести стержня 2. Момент силы считается положительным, если она стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Подставив значение моментов в выражение (1), получим:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{HC_2}{HC_1}.$$

Из ΔAC_2H по теореме Пифагора $HC_2 = \sqrt{AC_2^2 - AH^2} = \sqrt{8^2 - 4,8^2} = 6,4$ (см). Из ΔAC_1H по теореме Пифагора $HC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6$ (см). Следовательно,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{HC_2}{HC_1} = \frac{6,4}{3,6} = \frac{16}{9}.$$

Второй способ.

Известно, что радиус-вектор ЦТ совокупности тел можно найти по формуле:

$$\mathbf{R_C} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r_k}}{\sum_{k=1}^{n} m_k},$$

где n – количество тел, m_k – масса тела k, $\mathbf{r_k}$ – радиус-вектор ЦТ тела k.

В принятой нами системе координат (рис. 1), координаты ЦТ примут следующий вид:

$$X_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad Y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$

где x_1 и x_2 – расстояние от центра тяжести 1 и 2 стержня до оси X; y_1 и y_2 – расстояние от центра тяжести 1 и 2 стержня до оси Y. $x_2 = y_1 = 0$, $x_1 = 6$ см, $y_2 = 8$ см. Поэтому

$$X_C = \frac{6m_1}{m_1 + m_2}, \quad Y_C = \frac{8m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Согласно пункту 1), минимальное расстояние $AH = \sqrt{(X_C)^2 + (Y_C)^2} = 4,8$ см. Подставим в эту формулу выражения из системы (2):

$$AH = \frac{\sqrt{36m_1^2 + 64m_2^2}}{m_1 + m_2} = 4,8. \tag{3}$$

Возведём обе части уравнения (3) в квадрат и упростим полученное выражение:

$$36m_1^2 + 64m_2^2 = (4,8)^2 \cdot (m_1 + m_2)^2;$$

$$36m_1^2 + 64m_2^2 = 23,04 \cdot (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2);$$

$$12,96m_1^2 + 40,96m_2^2 - 46,08m_1m_2 = 0;$$

$$(3,6m_1)^2 + (6,4m_2)^2 - 2 \cdot 3,6 \cdot 6,4m_1m_2 = 0.$$

Воспользуемся тем, что полученное слева выражение является квадратом разности:

$$(3,6m_1 - 6,4m_2)^2 = 0;$$

$$3,6m_1 - 6,4m_2 = 0;$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{16}{9}.$$

Ответ: 1) минимальное расстояние равно 4,8 см, максимальное – 8 см; 2) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{16}{9}$.