Официальные решения заданий конкурса "Школа Физтеха 2023"
Вариант №2, рекомендован для учеников 7-8 классов

Задания по математике

1. Кот в сапогах должен выполнить миссию за три дня. Его награда — 950 песо. В первый день ему заплатили 475 песо, во второй — $\frac{2}{5}$ от суммы, уплаченной в первый день, а в третий — остальную награду. Сколько песо получит Кот на третий день?

Решение

Во второй день Кот получил

$$475 \cdot \frac{2}{5} = 95 \cdot 2 = 190 \text{ (песо)}.$$

За первые два дня Коту заплатили

$$475 + 190 = 665 \text{ (песо)}.$$

На третий день Коту заплатили

$$950 - 665 = 285 \text{ (песо)}.$$

Ответ: 285 песо.

2. На заводе из нефти получили 5 $м^3$ бензина и керосина вместе. Керосина получилось на 25% больше, чем бензина. Сколько получили керосина, а сколько — бензина?

Решение

Пусть бензина получили x $м^3$, по условию керосина больше на 25%, поэтому это ($1,25x$) $м^3$. Всего получили ($x+1,25x$) $м^3$, а по условию это — 5 $м^3$:

$$x+1,25x=5;$$

$$2,25x=5;$$

$$x=5:2\frac{1}{4};$$

$$x=2\frac{2}{9} \text{ м}^3 \text{ — было получено бензина;}$$

$$5-2\frac{2}{9}=4\frac{9}{9}-2\frac{2}{9}=2\frac{7}{9} \text{ (м}^3\text{) — было получено керосина.}$$

Ответ: $2\frac{7}{9}$ $м^3$ керосина и $2\frac{2}{9}$ $м^3$ бензина.

3. На Сорочинской ярмарке продают блин «Великан» в форме ромба с диагоналями 18 см и 25 см, а также круглый блин «Классический», длина окружности которого равна ($0,3\cdot\pi$) м. Наташа съела блин «Великан», а Катя — «Классический». Кто из девушек съел больше?

Решение

Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно знать площади каждого из блинов. Блин "Великан" — это ромб с известными диагоналями. Найдем площадь блина "Великана" $S_в$:

$$S_В = \frac{d_1 d_2}{2};$$

$$S_В = \frac{18 \cdot 25}{2} = 9 \cdot 25 = 225 \text{ см}^2.$$

Блинчик "Классический" имеет форму круга, длина окружности которого $0{,}3\pi$ м. Из формулы длины окружности имеем $r = \frac{C}{2\pi}$, поэтому радиус равен 0,15 м, или 15 см. Тогда площадь блина найдем по формуле:

$$S_к = \pi r^2;$$

$$S_к = \pi \cdot 15^2 = 225\pi \text{ см}^2;$$

$225 < 225\pi$. Поэтому площадь "Классического" блина больше площади "Великана".

Ответ: Катя съела больше.

4. Решите уравнение графическим способом.

$$\frac{8}{x} = \sqrt{x}$$

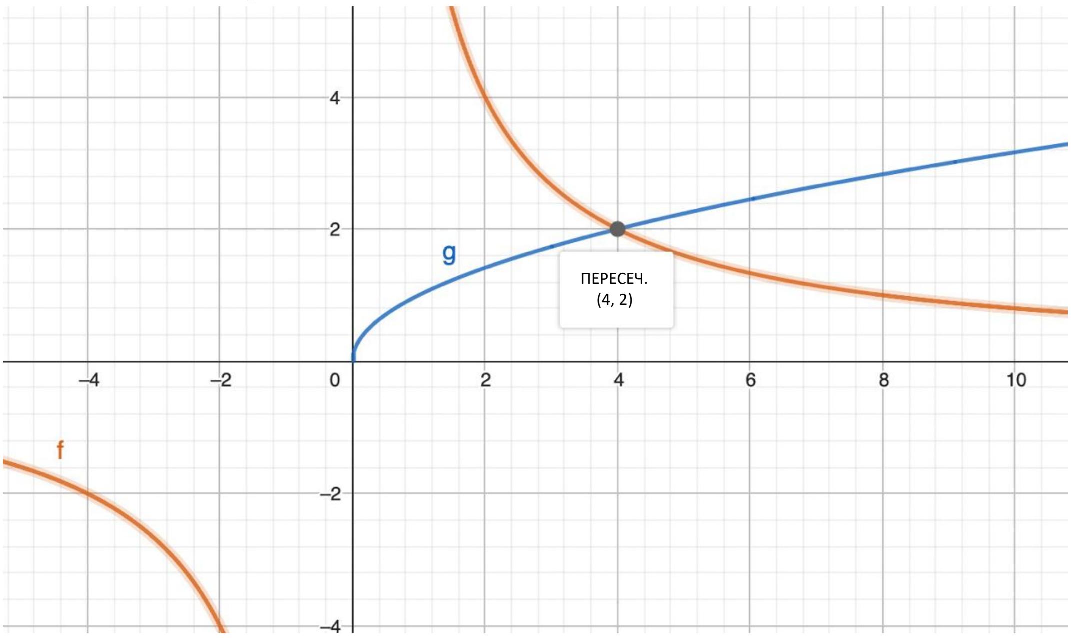
Решение

Рассмотрим функции:

$$f(x) = \frac{8}{x};$$

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

Для графического решения нужно построить графики функций и найти абсциссу точки или абсциссы точек их пересечения:



Как видно из графика, абсциссой точки пересечения является 4.

Ответ: x = 4.

5. Миньоны забыли последнюю цифру кода, необходимого для запуска их космического корабля. В инструкции к кораблю написано, что последняя цифра кода является квадратом значения выражения

$$\frac{2}{4-x}+\left(\frac{3}{18}\right)^1+\left(\sqrt{5}\right)^0+\frac{4+x}{(-6x+9+x^2)}\div\frac{(-16+x^2)}{(-6+2x)}-\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}$$

при $x=\frac{7}{3}$. Какая это цифра?

Решение

Сначала имеет смысл упростить выражение, а затем подставить значение переменной x.

$$\frac{2}{4-x}+\left(\frac{3}{18}\right)^1+\left(\sqrt{5}\right)^0+\frac{4+x}{(-6x+9+x^2)}\div\frac{(-16+x^2)}{(-6+2x)}-\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}$$

Воспользовавшись свойствами степеней и корней, правилом деления обыкновенных дробей, а также формулами сокращенного умножения, получим:

$$\frac{2}{4-x}+\frac{1}{6}+1+\frac{4+x}{(x-3)^2}\cdot\frac{2(x-3)}{(x-4)(x+4)}-\sqrt{\frac{49}{36}}$$

Сократим одинаковые многочлены и сведем подобные слагаемые:

$$=\frac{2}{4-x}+\frac{2}{(x-3)(x-4)}+\frac{7}{6}-\frac{7}{6}=-\frac{2}{x-4}+\frac{2}{(x-3)(x-4)}=-\frac{-2(x-3)+2}{(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{2(4-x)}{(x-3)(x-4)}=-\frac{2(4-x)}{(x-3)(4-x)}=\frac{-2}{x-3}.$$

Подставим значение переменной $x=\frac{7}{3}$ и выполним арифметические действия:

$$\frac{-2}{\left(\frac{7}{3}-3\right)}=-\frac{2}{1}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=3.$$

Вычислим квадрат данного выражения:

$$3^2=9.$$

Ответ: 9.

6. Саша и Коля принимают участие в конкурсе, где они вместе должны ответить на 250 вопросов как можно быстрее. В течение некоторого времени t на вопросы отвечал Саша со скоростью 9 ответов ежеминутно. Когда он устал, Коля сменил его и ответил на все остальные вопросы. Коля отвечал тоже в течение времени t. Если бы каждый парень отвечал на вопросы с той же скоростью, что и на конкурсе, но Саша — в течение

времени t, а Коля — в течение 12,5 мин., то Коля ответил бы на вдвое больше вопросов, чем Саша. Найдите t.

Решение

Пусть Коля отвечал на x вопросов каждую минуту, тогда вместе они ответили на ($xt+9t$) вопросов, а по условию это 250.

Известно, что на ($12,5x$) вопросов смог бы ответить Коля за 12,5 минут, а это вдвое больше чем количество ответов Саши за t минут.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} xt + 9t = 250, \\ 2 \cdot 9t = 12{,}5x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{12{,}5x^2}{18} + 9 \cdot \dfrac{12{,}5x}{18} = 250, \\ t = \dfrac{12{,}5x}{18}. \end{cases}$$

Решим отдельно первое уравнение системы:

$$\frac{12{,}5x^2}{18} + 9 \cdot \frac{12{,}5x}{18} = 250 | \cdot 36;$$

$$25x^2 + 225x - 9000 = 0 | \div 25;$$

$$x^2 + 9x - 360 = 0;$$

$$\mathcal{D} = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-360) = 81 + 1440 = 1521;$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{1521}}{2} = -4{,}5 \pm 19{,}5.$$

Так как x — это количество ответов Саши, отрицательный корень не подходит, поэтому

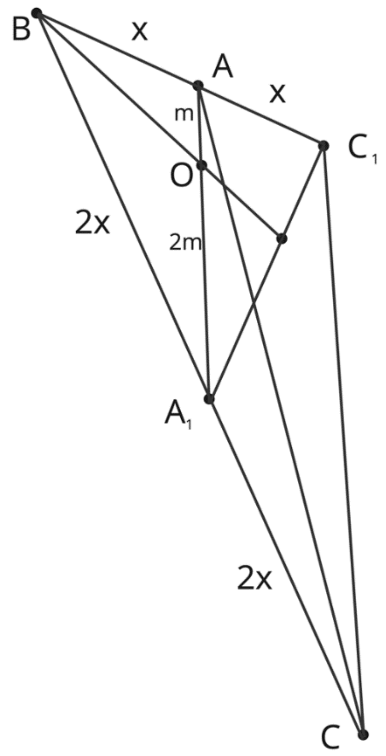
$$x = -4{,}5 + 19{,}5 = 15;$$

$$t = \frac{12{,}5x}{18};$$

$$t = \frac{12{,}5 \cdot 15}{18} = 10\frac{5}{12}\ (\text{мин}) = 10\ \text{мин}\ 25\ \text{с}.$$

Ответ: 10 мин 25 с.

7. Треугольники ABC та BA_1C_1 расположены так, что отрезок AA_1 является медианой ΔABC и биссектрисой $\angle BA_1C_1$. Отрезок AA_1 разделён на три равные части точкой пересечения медиан ΔABC и точкой пересечения биссектрис ΔBA_1C_1. Образованный четырёхугольник A_1AC_1C – трапеция. Найдите все углы ΔBA_1C_1.



Решение

1) Обозначим точку пересечения биссектрис треугольника BA_1C_1 через O. Обозначим AO через m. Из свойств точки пересечения медиан треугольника и условия задачи следует, что $A_1O = 2m$.
2) Обозначим BA через x. Из свойств биссектрисы $BA_1 = 2x$ и $A_1C = 2x$.
3) Из того, что A_1AC_1C — трапеция, имеем $AA_1 \| C_1C$. Из теоремы Фалеса, $AC_1 = x$.
4) Таким образом, в треугольнике BA_1C_1 отрезок A_1A – биссектриса, а также медиана, поскольку $BA = AC_1$. Поэтому треугольник BA_1C_1 равнобедренный.
5) Поскольку $BA_1 = 2x = BC_1$, то треугольник BA_1C_1 равносторонний и все его углы равны 60°.

Ответ: 60°.