Офіційні розв'язки завдань конкурсу «Школа Фізтеху 2023»
Варіант №2, рекомендований для учнів 7-8 класів

Завдання з математики

1. Кіт у чоботях має виконати місію за три дні. Його нагорода — 950 песо. У перший день йому заплатили 475 песо, у другий – $\frac{2}{5}$ від суми сплаченої в перший день, а у третій – решту нагороди. Скільки песо отримає Кіт на третій день?

Розв'язок

У другий день Кіт отримав

$$475 \cdot \frac{2}{5} = 95 \cdot 2 = 190 \text{ (песо).}$$

За перші два дні Коту заплатили

$$475 + 190 = 665 \text{ (песо).}$$

Третього дня Коту заплатили

$$950 - 665 = 285 \text{ (песо).}$$

Відповідь: 285 песо.

2. На заводі з нафти отримали 5 $м^3$ бензину та гасу разом. Гасу вийшло на 25% більше, ніж бензину. Скільки отримали гасу, а скільки – бензину?

Розв'язок

Нехай бензину отримали x $м^3$, за умовою гасу більше на 25%, тому це ($1,25x$) $м^3$. Загалом отримали ($x+1,25x$) $м^3$, а за умовою це – 5 $м^3$:

$$x+1,25x=5;$$

$$2,25x=5;$$

$$x=5:2\frac{1}{4};$$

$$x=2\frac{2}{9}\ м^3 \text{ – було отримано бензину;}$$

$$5-2\frac{2}{9}=4\frac{9}{9}-2\frac{2}{9}=2\frac{7}{9}\ (м^3) \text{ – було отримано гасу.}$$

Відповідь: $2\frac{7}{9}$ $м^3$ гасу та $2\frac{2}{9}$ $м^3$ бензину.

3. На Сорочинському ярмарку продають млинець «Велетень» у формі ромба з діагоналями 18 см та 25 см, а також круглий млинець «Класичний», довжина кола якого дорівнює ($0,3\cdot\pi$) м. Наталка з'їла млинець «Велетень», а Катя — «Класичний». Хто з дівчат з'їв більше?

Розв'язок

Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно знати площі кожного з млинців. Млинець «Велетень» — це ромб з відомими діагоналями. Знайдемо площу млинця «Велетня» $S_в$:

$$S_B = \frac{d_1 d_2}{2};$$

$$S_B = \frac{18 \cdot 25}{2} = 9 \cdot 25 = 225 \text{ см}^2.$$

Млинець «Класичний» має форму круга, довжина коло якого 0,3π м. З формули довжини кола маємо $r = \frac{C}{2\pi}$, тож радіус дорівнює 0,15 м, або ж 15 см. Тоді площу млинця знайдемо за формулою:

$$S_к = \pi r^2;$$

$$S_к = \pi \cdot 15^2 = 225\pi \text{ см}^2;$$

225 < 225π. Тому площа «Класичного» млинця більша за площу «Велетня».

Відповідь: Катя з'їла більше.

4. Розв'яжіть рівняння графічним способом.

$$\frac{8}{x} = \sqrt{x}$$

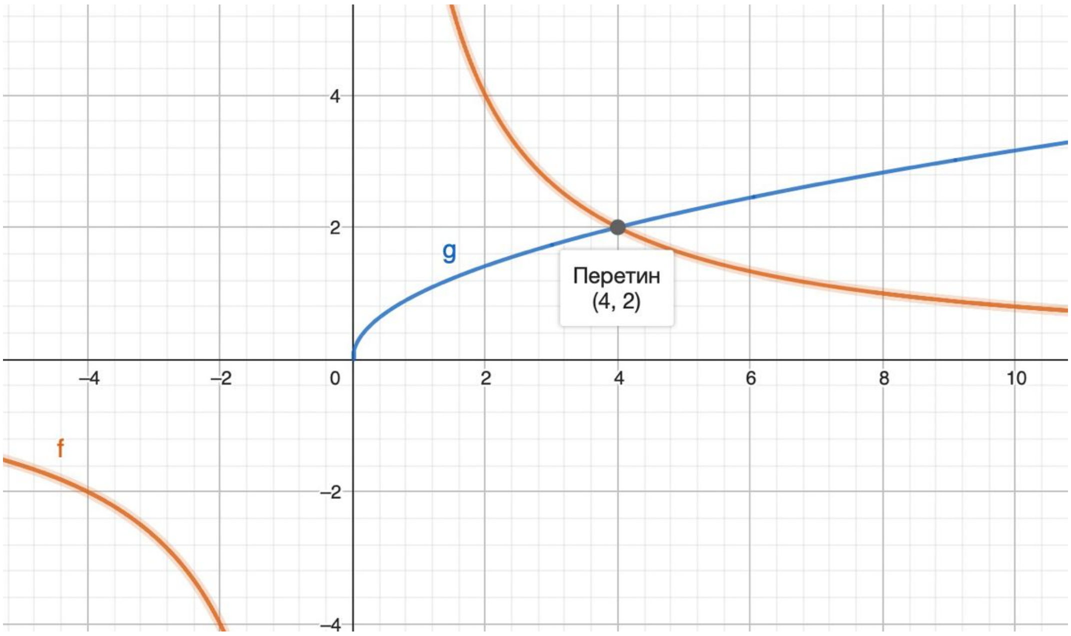
Розв'язок

Розглянемо функції:

$$f(x) = \frac{8}{x};$$

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

Для графічного розв'язку треба побудувати графіки функцій та знайти абсцису точки або абсциси точок їх перетину:



Як видно з графіку, абсцисою точки перетину є 4.

Відповідь: x = 4.

5. Міньйони забули останню цифру коду, який потрібний для запуску їхнього корабля. В інструкції до корабля написано, що остання цифра коду є квадратом значення виразу

$$\frac{2}{4-x}+\left(\frac{3}{18}\right)^{1}+\left(\sqrt{5}\right)^{0}+\frac{4+x}{(-6x+9+x^2)}\div\frac{(-16+x^2)}{(-6+2x)}-\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}$$

при $x=\frac{7}{3}$. Яка це цифра?

Розв'язок

Спочатку має сенс спростити вираз, а потім підставити значення змінної x.

$$\frac{2}{4-x}+\left(\frac{3}{18}\right)^{1}+\left(\sqrt{5}\right)^{0}+\frac{4+x}{(-6x+9+x^2)}\div\frac{(-16+x^2)}{(-6+2x)}-\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}$$

Скориставшись властивостями степенів та коренів, правилом ділення звичайних дробів, а також формулами скороченого множення, отримаємо:

$$\frac{2}{4-x}+\frac{1}{6}+1+\frac{4+x}{(x-3)^2}\cdot\frac{2(x-3)}{(x-4)(x+4)}-\sqrt{\frac{49}{36}}$$

Скоротимо однакові многочлени та зведемо подібні доданки:

$$=\frac{2}{4-x}+\frac{2}{(x-3)(x-4)}+\frac{7}{6}-\frac{7}{6}=-\frac{2}{x-4}+\frac{2}{(x-3)(x-4)}=-\frac{-2(x-3)+2}{(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{2(4-x)}{(x-3)(x-4)}=-\frac{2(4-x)}{(x-3)(4-x)}=\frac{-2}{x-3}.$$

Підставимо значення змінної $x=\frac{7}{3}$ та виконаємо арифметичні дії:

$$\frac{-2}{\left(\frac{7}{3}-3\right)}=-\frac{2}{1}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=3.$$

Обчислимо квадрат даного виразу:

$$3^2=9.$$

Відповідь: 9.

6. Саша та Коля беруть участь у конкурсі, де вони разом мають відповісти на 250 запитань якомога швидше. Протягом деякого часу t на запитання відповідав Саша зі швидкістю 9 відповідей щохвилини. Коли він втомився, Коля змінив його та відповів на решту запитань. Коля відповідав теж протягом часу t. Якби кожен хлопець відповідав на питання з тією ж швидкістю, що і на конкурсі, але Саша – протягом часу t, а Коля – протягом 12,5 хв, то Коля відповів би на вдвічі більшу кількість запитань, ніж Саша. Знайдіть t.

Розв'язок

Нехай Коля відповідав на x запитань щохвилини, тоді разом вони відповіли на $(xt+9t)$ запитань, а за умовою це 250.

Відомо, що на ($12{,}5x$) запитань зміг би відповісти Коля за 12,5 хвилин, а це вдвічі більше ніж кількість відповідей Сашка за t хвилин.

Складемо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xt + 9t = 250, \\ 2 \cdot 9t = 12{,}5x; \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{12{,}5x^2}{18} + 9 \cdot \dfrac{12{,}5x}{18} = 250, \\ t = \dfrac{12{,}5x}{18}. \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$$\frac{12{,}5x^2}{18} + 9 \cdot \frac{12{,}5x}{18} = 250 | \cdot 36;$$

$$25x^2 + 225x - 9000 = 0 | \div 25;$$

$$x^2 + 9x - 360 = 0;$$

$$\mathcal{D} = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-360) = 81 + 1440 = 1521;$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{1521}}{2} = -4{,}5 \pm 19{,}5.$$

Через те, що x — це кількість відповідей Сашка, від'ємний корінь не підходить, тож

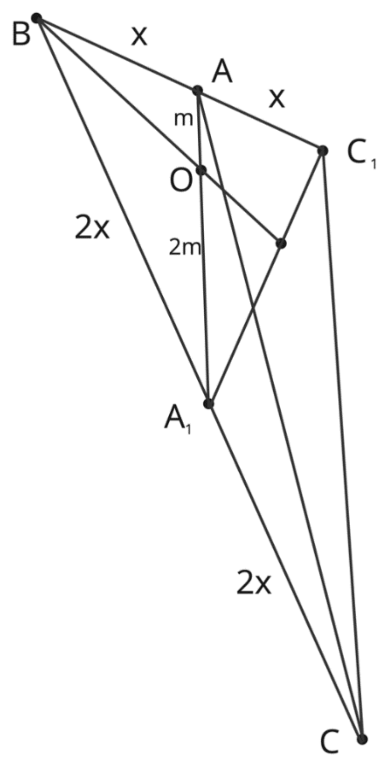
$$x = -4{,}5 + 19{,}5 = 15;$$

$$t = \frac{12{,}5x}{18};$$

$$t = \frac{12{,}5 \cdot 15}{18} = 10\frac{5}{12} \text{ (хв)} = 10 \text{ хв } 25 \text{ с.}$$

Відповідь: 10 хв 25 с.

7. Трикутники ABC та BA_1C_1 розташовані так, що відрізок AA_1 є медіаною ΔABC та бісектрисою $\angle BA_1C_1$. Відрізок AA_1 поділено на три рівні частини точкою перетину медіан ΔABC та точкою перетину бісектрис ΔBA_1C_1. Утворений чотирикутник A_1AC_1C — трапеція. Знайдіть всі кути ΔBA_1C_1.



Розв'язок

1) Позначимо точку перетину бісектрис трикутника BA_1C_1. через O. Позначимо AO через m. З властивостей точку перетину медіан трикутника та умови задачі випливає, що $A_1O = 2m$.
2) Позначимо BA через x. З властивостей бісектриси $BA_1 = 2x$ і $A_1C = 2x$.
3) З того, що A_1AC_1C — трапеція, маємо $AA_1 \| C_1C$. З теореми Фалеса, $AC_1 = x$.
4) Таким чином, в трикутнику BA_1C_1 відрізок A_1A – бісектриса, а також медіана, оскільки $BA = AC_1$. Тому трикутник BA_1C_1 рівнобедрений.

5) Оскільки $BA_1 = 2x = BC_1$, то трикутник BA_1C_1 рівносторонній й усі його кути дорівнюють $60°$.

Відповідь: $60°$.