Официальные решения заданий конкурса «Школа Физтеха 2023»
Вариант №3, рекомендован для учеников 9-11 классов и старше

Задания по математике

1. Школьник Витя вместе с родителями сел в авто в Киеве и поехал домой в Херсон. Длина маршрута – 650 км, а едут они со скоростью 130 км/ч. Во время поездки Витя спросил у мамы, сколько ещё ехать. Она ответила, что проехали 60% пути.
а) Сколько километров проехал Витя?
б) Сколько времени осталось ехать?

Решение

а) По правилу нахождения процента от числа,
$$60\% \text{ от } 650 = 650 \cdot \frac{60}{100} = 65 \cdot 6 = 390 \text{ (км)}.$$
Следовательно, Витя проехал 390 км.
б) Весь пусть составляет 650 км, поэтому осталось проехать
$$650 - 390 = 260 \text{ (км)}.$$
Чтобы найти, сколько времени осталось ехать, разделим путь на скорость:
$$260 : 130 = 2 \text{ (ч)}.$$
Ответ: а) 390 км; б) 2 часа.

2. Борис увлёкся спортом и нашёл программу ежедневных отжиманий. За первую неделю Борис сделал 700 отжиманий. За каждую следующую неделю Борис выполнял на 140 отжиманий больше. Сколько отжиманий сделал Борис за 12 недель тренировок?

Решение

Так как каждую неделю количество отжиманий увеличивается на одно и тоже число, то количества отжиманий на каждой неделе являются членами арифметической прогрессии. Тогда сумму отжиманий за 12 недель представим, как сумму 12 членов такой арифметической прогрессии:
$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$
где $n = 12$ – общее количество недель, S_n – сумма отжиманий, которая будет выполнена за n недель, $a_1 = 700$ – первый элемент прогрессии, количество отжиманий за первую неделю, $d = 120$ – шаг прогрессии, на сколько еженедельно увеличивается число отжиманий.
Подставим все известные величины в формулу:
$$S_n = \frac{2 \cdot 700 + 140 \cdot (12-1)}{2} \cdot 12 = \left(2 \cdot 700 + 140 \cdot (11)\right) \cdot 6 = 17\,640.$$

Ответ: 17 640 отжиманий.

3. Волонтёры закупают корм в приюты для кошек. В первом приюте 3 кошки и 5 котят съедают 2 700 г корма за сутки. Во втором приюте 6 кошек и 9 котят съедают 5 040 г корма в сутки. Считайте, что в этих приютах ежедневно каждая кошка съедает одинаковую массу корма. Как и каждый котёнок. Сколько в этих приютах каждый день съедает кошка, а сколько – котёнок? Если в ответе получится, что котёнок съедает больше, чем кошка, объясните, почему это может происходить.

Решение

Введём обозначения:

a – масса корма, который съедает кошка за сутки, в граммах;

b – масса корма, который съедает котёнок за сутки, в граммах.

Из условия задачи, в первом приюте 3 кошки и 5 котят съедают 2 700 г корма за сутки:

$$3a + 5b = 2\ 700.$$

Аналогичным образом для второго приюта получим уравнение

$$6a + 9b = 5\ 040.$$

Объединим уравнения в систему:

$$\begin{cases} 3a + 5b = 2\ 700 \\ 6a + 9b = 5\ 040 \end{cases}.$$

Для решения воспользуемся методом сложения, умножим первое уравнение на -2:

$$\begin{cases} -6a - 10b = -5\ 400 \\ 6a + 9b = 5\ 040 \end{cases}.$$

Сложим оба уравнения и найдём b:

$$-6a - 10b + 6a + 9b = -360;$$

$$-b = -360;$$

$$b = 360.$$

Подставим результат в первое уравнение и найдём a:

$$3a + 5 \cdot 360 = 2\ 700;$$

$$3a = 900;$$

$$a = 300.$$

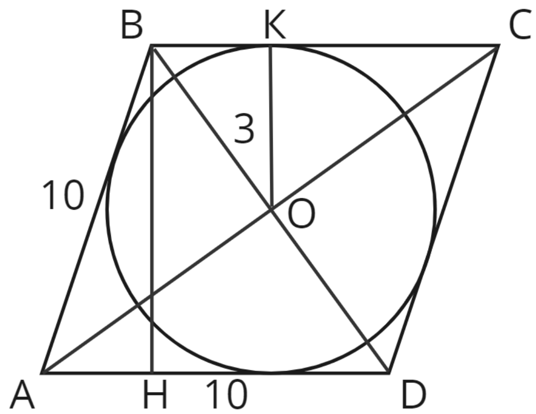
Значит, кошка съедает в день 300 г корма, а котёнок – 360 г.

Котята обычно едят больше, чем взрослые коты, потому что они активнее растут и развиваются и больше двигаются, чем коты. Поэтому котятам нужно больше энергии и питательных веществ.

Ответ: кошка съедает 300 г корма в день, а котёнок – 360 г.

4. Круглую медаль изготовили из заготовки в форме ромба со стороной 10 см, описанного вокруг окружности радиусом 3 см. Вычислите площадь заготовки.

Решение



Вписанная окружность касается всех четырёх сторон ромба, а её центр совпадает с центром ромба. Как известно, радиус вписанной в ромб окружности равен половине высоты ромба. Высота BH = 6 см. Найдём площадь заготовки:

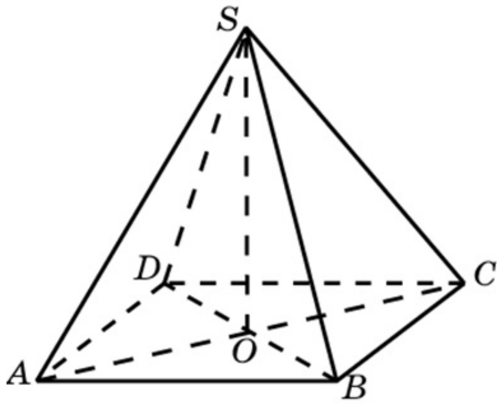
$$S = BH \cdot AD = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 60 $см^2$.

5. Инженер проектирует пирамиду, в основании которой лежит прямоугольник с диагональю 24 см. Высота пирамиды – 40 см, все её боковые рёбра равны между собой. Вычислите длину бокового ребра.

Решение

Так как все боковые рёбра пирамиды равны между собой, её вершина проектируется в центр окружности, описанной вокруг основания. В основании лежит прямоугольник, центр описанной около него окружности находится в точке пересечения диагоналей.



Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, поэтому половина диагонали составит 12 см. Рассмотрим прямоугольный треугольник SOA ($\angle SOA = 90°$). Найдём боковое ребро с помощью теоремы Пифагора.

$$SA^2 = SO^2 + AO^2 = 40^2 + 12^2 = 1\,600 + 144 = 1744;$$

$$SA = \sqrt{1\,744} = \sqrt{16 \cdot 109} = 4\sqrt{109} \text{ (см)}.$$

Ответ: $4\sqrt{109}$ см.

6. Оливия изучает радиоволны. Работая над Wi-Fi роутером, она обнаружила, что частота его волн меняется с течением времени по формуле

$$F(t) = 5\,000 + 11\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right),$$

где $F(t)$ – частота сигнала в мегагерцах, t – время в секундах с начала наблюдения.

а) В какой момент времени на отрезке $25 \le t \le 35$ частота составит 5 000 мегагерц?

б) Найдите максимальное и минимальное значение частоты.

Решение

а) Нам требуется частота сигнала в 5 000 мегагерц. Подставим данное значение в формулу частоты и решим уравнение

$$5\,000 = 5\,000 + 11\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right);$$

$$11\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = 0;$$

$$\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = 0;$$

$$\frac{\pi t}{10} = \pi n, \qquad n \in Z;$$

$$t = 10n, \qquad n \in Z.$$

Нас интересует область $25 \le t \le 35$, поэтому выберем значение $n = 3$ и получим корень $t = 30$ (секунд).

б) Максимальное значение функции синус равно 1, а минимальное равно -1. Подставим $\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = 1$ для поиска максимального значения частоты сигнала:

$$F(t) = 5\,000 + 11 = 5\,011.$$

Подставим $\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = -1$ для поиска минимального значения частоты сигнала:

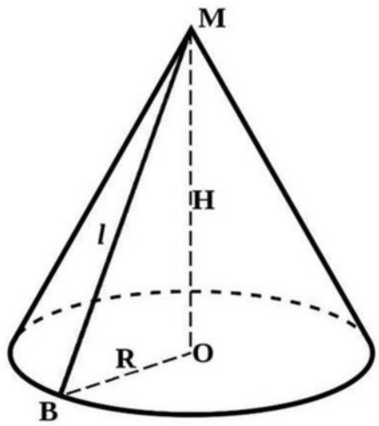
$$F(t) = 5\,000 - 11 = 4\,989.$$

Ответ: а) t = 30; б) 5 011 мегагерц и 4 989 мегагерц.

7. Пожарное ведро имеет форму конуса. Его наклонная равна 41 см, а сумма высоты и радиуса – 49 см. Вычислите объём ведра.

Решение

На рисунке ниже отрезок BM – образующая конуса, BO – радиус его основания, MO – высота. Обозначим $BO = R$, тогда $MO = 49 - R$.



По теореме Пифагора в треугольнике ВОМ (∠BOM = 90°):

$$BM^2 = BO^2 + OM^2;$$

$$41^2 = R^2 + (49 - R)^2;$$

$$1\,681 = R^2 + 49^2 - 2 * 49 * R + R^2;$$

$$1\,681 = 2R^2 - 98R + 2\,401;$$

$$R^2 - 49R + 360 = 0.$$

Получено квадратное уравнение. Его можно решить с помощью формул корней квадратного уравнения или подобрать решения по теореме, обратной к теореме Виета. Корнями данного уравнения являются числа 9 и 40. Теперь возможны две ситуации, которые не противоречат условиям задачи:

1) $R = 9$ см, тогда $MO = 49 - 9 = 40$ (см);

2) $R = 40$ см, тогда $MO = 9$ см.

Вычислим объём конуса для каждой из них:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H;$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 40 = 1080\pi \text{ (см}^3\text{)};$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 40^2 \cdot 9 = 4800\pi \text{ (см}^3\text{)};$$

Ответ: 1080π см^3 или 4800π см^3.

8. У Максима есть 7 монет по 5 центов, 9 монет по 10 центов и 4 монеты по 25 центов. Брат предлагает Максиму на выбор две игры. Проигравший оплатит победителю порцию мороженого.

1) Достать наугад поочередно две монеты и выиграть, если номинал второй монеты окажется больше, чем у первой.

2) Достать наугад две монеты и выиграть, если хотя бы одна монета окажется 25-центовой.

В какой из этих игр шансы Максима на победу больше?

Решение

1) В первой игре Максим выиграет, если:

1.1) сначала достанет монету номиналом в 5 центов, а потом – 10- или 25-центовую монету или

1.2) сначала достанет 10-центовую монету, а потом – 25-центовую.

Если он сначала вытащит 25-центовую монету, то проиграет.
Вероятность достать первой 5-центую монету равна отношению числа 5-центовых монет у Максима к числу всех его монет, то есть $\frac{7}{20}$. Далее остаётся 13 монет номиналом в 10 или 25 центов и всего 19 монет. Значит, вероятность того, что вторая монета окажется 10- или 25-центовой, равна $\frac{13}{19}$. Вероятность события 1.1) найдём по правилу умножения вероятностей:

$$\frac{7}{20}\cdot\frac{13}{19}=\frac{91}{380}.$$

Вероятность достать первой монету в 10 центов составляет $\frac{9}{20}$. Далее остаётся 4 25-центовых монет и всего 19 монет. Значит, вероятность того, что вторая монета окажется 25-центовой, равна $\frac{4}{19}$. Вероятность события 1.2) равна

$$\frac{9}{20}\cdot\frac{4}{19}=\frac{9}{95}.$$

Вероятность победы в первой игре равна сумме вероятностей событий 1.1) и 1.2):

$$P_1=\frac{91}{380}+\frac{36}{380}=\frac{127}{380}.$$

2) Максим выиграет во второй игре, если:

2.1) первой достанет 25-центовую монету, а второй – монету другого номинала;

2.2) первой достанет не 25-центовую монету, а второй – 25-центовую;

2.3) и первая, и вторая монета окажутся 25-центовыми.

Вероятность первой вытащить 25-центовую монету равна отношению числа таких монет у Максима и количеством всех его монет, то есть $\frac{4}{20}$. Вероятность второй вытащить монету другого номинала равна $\frac{16}{19}$. Вероятность события 2.1) составит

$$\frac{4}{20}\cdot\frac{16}{19}=\frac{64}{380}.$$

Вероятность события 2.2) аналогично равна

$$\frac{16}{20}\cdot\frac{4}{19}=\frac{64}{380}.$$

Вероятность события 2.3) составит

$$\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}=\frac{12}{380}.$$

Вероятность выиграть во второй игре равна сумме вероятностей событий 2.1), 2.2) и 2.3):

$$P_2=\frac{64}{380}+\frac{64}{380}+\frac{12}{380}=\frac{140}{380}.$$

$P_2>P_1$.

Ответ: во второй игре.

9. В университете работает студенческое самоуправление, которое помогает университету решать учебные и бытовые вопросы. Оно состоит из 20-и студентов, и раз в год выбирает себе председателя из 4-х кандидатов. Каждый из двадцатки голосует только за одного кандидата. В конце голосования составляют протокол, в котором записывают число голосов каждого кандидата, но не указывают, кто за кого голосовал. Сколько разных вариантов протоколов может получиться?

Решение

Пусть каждый студент бросает в урну для голосования белый листок с номером кандидата, за которого проголосовал. Достанем все листки и упорядочим по номерам кандидатов. Получится несколько или ни одного листков за первого, несколько или ни одного за второго и так далее. Чтобы отделить листки каждого из кандидатов, вложим между ними чёрный листок, даже если за какого-то кандидата никто не проголосовал. Получится три чёрных разделительных листка.

Число разных протоколов определим по формуле сочетаний:

$$C_{23}^{3} = \frac{23!}{3!\,(23-3)!} = \frac{23!}{6 * 20!} = \frac{21 * 22 * 23}{6} = 1\,771.$$

Ответ: 1 771.