Офіційні розв'язки завдань конкурсу "Школа Фізтеху 2023"
Варіант №3, рекомендований для учнів 9-11 класів і старших

Завдання з математики

1. Школяр Вітя разом з батьками сів в машину в Києві та поїхав додому в Херсон. Довжина маршруту – 650 км, а їдуть вони зі швидкістю 130 км/год. Під час поїздки Вітя спитав у мами, скільки ще їхати. Вона відповіла, що вони проїхали 60% шляху.

а) Скільки кілометрів проїхав Вітя?

б) Скільки часу лишилося їхати?

Розв'язок

а) За правилом знаходження відсотка від числа,

$$60\% \text{ от } 650 = 650 \cdot \frac{60}{100} = 65 \cdot 6 = 390 \text{ (км)}.$$

Отже, Вітя проїхав 390 км.

б) Весь шлях становить 650 км, тому залишилося проїхати

$$650 - 390 = 260 \text{ (км)}.$$

Щоб знайти, скільки часу залишилося їхати, розділимо шлях на швидкість:

$$260 : 130 = 2 \text{ (год.)}.$$

Відповідь: а) 390 км; б) 2 години.

2. Борис захопився спортом та знайшов програму щоденних віджимань. За перший тиждень Борис зробив 700 віджимань. Кожного наступного тижня Борис виконував на 140 віджимань більше. Скільки віджимань зробив Борис за 12 тижнів тренувань?

Роз'язок

Оскільки щотижня кількість віджимань збільшується на одне й те саме число, то кількості віджимань на кожному тижні є членами арифметичної прогресії. Тоді суму віджимань за 12 тижнів представимо, як суму 12 членів такої арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

де $n = 12$ – загальна кількість тижнів, S_n – сума віджимань, яка буде виконана за n тижнів, $a_1 = 700$ – перший елемент прогресії, кількість віджимань за перший тиждень, $d = 120$ – крок прогресії, на скільки щотижня збільшується кількість віджимань.

Підставимо всі відомі величини у формулу:

$$S_n = \frac{2 \cdot 700 + 140 \cdot (12 - 1)}{2} \cdot 12 = \big(2 \cdot 700 + 140 \cdot (11)\big) \cdot 6 = 17\,640.$$

Відповідь: 17 640 віджимань.

3. Волонтери закуповують корм у притулки для котів. У першому притулку 3 кішки та 5 кошенят з'їдають 2 700 г корму за добу. У другому притулку 6 кішок і 9 кошенят з'їдають 5 040 г корму за добу. Вважайте, що в цих притулках щодня кожна кішка з'їдає однакову масу корму. Як і кожне кошеня. Скільки в цих притулках щодня з'їдає кішка, а скільки – кошеня? Якщо у відповіді вийде, що кошеня з'їдає більше, ніж кішка, поясніть, чому це може відбуватися.

Розв'язок

Введемо позначення:

a — маса корму, який з'їдає кішка за добу, в грамах;

b —маса корму, який з'їдає кошеня за добу, в грамах.

З умови задачі, у першому притулку 3 кішки і 5 кошенят з'їдають 2 700 г корму за добу:

$$3a + 5b = 2\,700.$$

Аналогічним чином для другого притулку отримаємо рівняння

$$6a + 9b = 5\,040.$$

Об'єднаємо рівняння в систему:

$$\begin{cases} 3a + 5b = 2\,700 \\ 6a + 9b = 5\,040 \end{cases}.$$

Для розв'язання скористаємося методом додавання, помножимо перше рівняння на -2:

$$\begin{cases} -6a - 10b = -5\,400 \\ \quad 6a + 9b = 5\,040 \end{cases}.$$

Складемо обидва рівняння і знайдемо b:

$$-6a - 10b + 6a + 9b = -360;$$

$$-b = -360;$$

$$b = 360.$$

Підставимо результат у перше рівняння і знайдемо a:

$$3a + 5 \cdot 360 = 2\,700;$$

$$3a = 900;$$

$$a = 300.$$

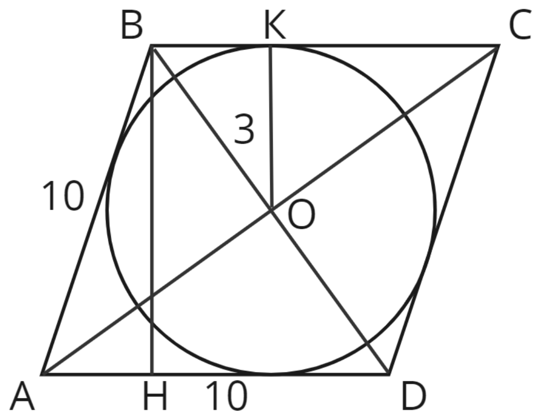
Отже, кішка з'їдає на день 300 г корму, а кошеня – 360 г.

Кошенята зазвичай їдять більше, ніж дорослі коти, тому що вони активніше ростуть і розвиваються, і більше рухаються, ніж коти. Тому кошенятам потрібно більше енергії та поживних речовин.

Відповідь: кішка з'їдає 300 г корму на день, а кошеня – 360 г.

4. Круглу медаль виготовили із заготовки у формі ромба зі стороною 10 см, описаного навколо кола радіусом 3 см. Обчисліть площу заготовки.

Розв’язок



Вписане коло торкається всіх чотирьох сторін ромба, а його центр збігається з центром ромба. Як відомо, радіус вписаного в ромб кола дорівнює половині висоти ромба. Висота BH = 6 см. Знайдемо площу заготовки:

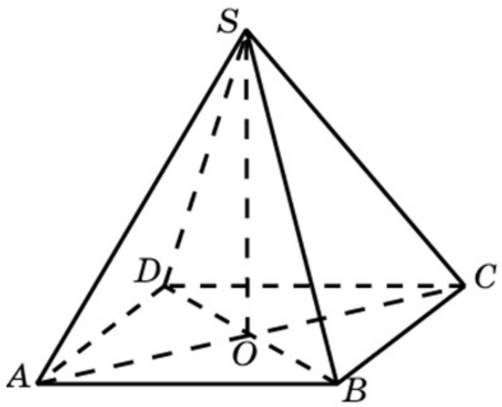
$$S = BH \cdot AD = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 60 см^2.

5. Інженер проєктує піраміду, в основі якої лежить прямокутник з діагоналлю 24 см. Висота піраміди – 40 см, усі її бічні ребра рівні між собою. Обчисліть довжину бічного ребра.

Розв’язок

Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні між собою, її вершина проектується в центр кола, описаного навколо основи. В основі лежить прямокутник, центр описаного навколо нього кола знаходиться в точці перетину діагоналей.



Діагоналі прямокутника в точці перетину діляться навпіл, тому половина діагоналі становитиме 12 см. Розглянемо прямокутний трикутник SOA ($\angle SOA = 90°$).

Знайдемо бічне ребро за допомогою теореми Піфагора.

$$SA^2 = SO^2 + AO^2 = 40^2 + 12^2 = 1\,600 + 144 = 1744;$$

$$SA = \sqrt{1\,744} = \sqrt{16 \cdot 109} = 4\sqrt{109} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $4\sqrt{109}$ см.

6. Олівія вивчає радіохвилі. Працюючи над Wi-Fi роутером, вона виявила, що частота його хвиль змінюється з часом за формулою

$F(t) = 5000 + 11\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$, де $F(t)$ – частота сигналу в мегагерцах, t – час в секундах з початку спостереження.

а) В який момент часу на відрізку $25 \leq t \leq 35$ частота складатиме 5 000 мегагерц?

б) Знайдіть максимальне та мінімальне значення частоти.

Розв'язок

а) Нам потрібна частота сигналу в 5 000 мегагерц. Підставимо дане значення у формулу частоти і розв'яжемо рівняння

$$5\,000 = 5\,000 + 11\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right);$$

$$11\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = 0;$$

$$\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = 0;$$

$$\frac{\pi t}{10} = \pi n, \qquad n \in Z;$$

$$t = 10n, \qquad n \in Z.$$

Нас цікавить область $25 \leq t \leq 35$, тому виберемо значення $n = 3$ і отримаємо корінь $t = 30$ (секунд).

б) Максимальне значення функції синус дорівнює 1, а мінімальне дорівнює -1. Підставимо $\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = 1$ для пошуку максимального значення частоти сигналу:

$$F(t) = 5\,000 + 11 = 5\,011.$$

Підставимо $\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) = -1$ для пошуку мінімального значення частоти сигналу:

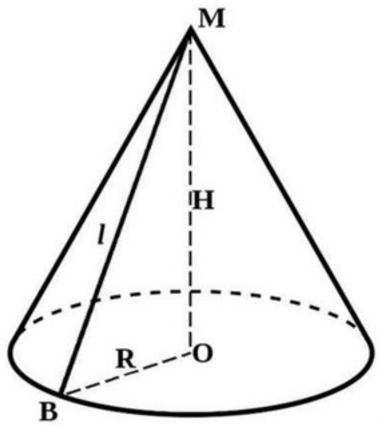
$$F(t) = 5\,000 - 11 = 4\,989.$$

Відповідь: а) t = 30; б) 5 011 мегагерц і 4 989 мегагерц.

7. Пожежне відро має форму конуса. Твірна конуса дорівнює 41 см, а сума висоти та радіусу – 49 см. Знайдіть об'єм відра.

Розв'язок

На малюнку нижче відрізок BM – твірна конуса, BO – радіус його основи, MO – висота. Позначимо $BO = R$, тоді $MO = 49 - R$.



За теоремою Піфагора в трикутнику BOM ($\angle BOM = 90°$):

$$BM^2 = BO^2 + OM^2;$$

$$41^2 = R^2 + (49 - R)^2;$$

$$1\,681 = R^2 + 49^2 - 2 * 49 * R + R^2;$$

$$1\,681 = 2R^2 - 98R + 2\,401;$$

$$R^2 - 49R + 360 = 0.$$

Отримано квадратне рівняння. Його можна розв'язати за допомогою формул коренів квадратного рівняння або підібрати розв'язки за теоремою, оберненою до теореми Вієта. Коріннями цього рівняння є числа 9 і 40. Тепер можливі дві ситуації, які не суперечать умовам задачі:

1) $R = 9$ см, тоді $MO = 49 - 9 = 40$ (см);

2) $R = 40$ см, тоді $MO = 9$ см.

Обчислимо об'єм конуса для кожної з них:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H;$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 40 = 1080\pi \text{ (см}^3\text{)};$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 40^2 \cdot 9 = 4800\pi \text{ (см}^3\text{)};$$

Відповідь: 1080π см^3 або 4800π см^3.

8. Максим має 7 монет по 5 центів, 9 монет по 10 центів і 4 монети по 25 центів. Брат пропонує Максиму на вибір дві гри. Той, хто програв, заплатить за порцію морозива для переможця.

1) Дістати навмання по черзі дві монети та виграти, якщо номінал другої монети виявиться більшим, ніж у першої.

2) Дістати навмання дві монети та виграти, якщо хоча б одна монета виявиться 25-центовою.

У якій із цих ігор шанси Максима на перемогу більші?

Розв'язок

1) У першій грі Максим виграє, якщо:

1.1) спочатку дістане монету номіналом у 5 центів, а потім – 10- або 25-центову монету або

1.2) спочатку дістане 10-центову монету, а потім – 25-центову.

Якщо він спочатку витягне 25-центову монету, то програє.

Імовірність дістати першою 5-центову монету дорівнює відношенню числа 5-центових монет у Максима до числа всіх його монет, тобто $\frac{7}{20}$. Далі залишається 13 монет номіналом у 10 або 25 центів і всього 19 монет. Отже, ймовірність того, що друга монета виявиться 10- або 25-центовою, дорівнює $\frac{13}{19}$. Імовірність події 1.1) знайдемо за правилом множення ймовірностей:

$$\frac{7}{20} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{380}.$$

Імовірність дістати першою монету в 10 центів становить $\frac{9}{20}$. Далі залишається 4 25-центових монет і всього 19 монет. Отже, ймовірність того, що друга монета виявиться 25-центовою, дорівнює $\frac{4}{19}$. Імовірність події 1.2) дорівнює

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{9}{95}.$$

Імовірність перемоги в першій грі дорівнює сумі ймовірностей подій 1.1) і 1.2):

$$P_1 = \frac{91}{380} + \frac{36}{380} = \frac{127}{380}.$$

2) Максим виграє в другій грі, якщо:

2.1) першою дістане 25-центову монету, а другою – монету іншого номіналу;

2.2) першою дістане не 25-центову монету, а другою – 25-центову;

2.3) і перша, і друга монета виявляться 25-центовими.

Імовірність першою витягнути 25-центову монету дорівнює відношенню числа таких монет у Максима до кількості всіх його монет, тобто $\frac{4}{20}$. Імовірність другої витягнути монету іншого номіналу дорівнює $\frac{16}{19}$. Імовірність події 2.1) становитиме

$$\frac{4}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{64}{380}.$$

Імовірність події 2.2) аналогічно дорівнює

$$\frac{16}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{64}{380}.$$

Імовірність події 2.3) становитиме

$$\frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{12}{380}.$$

Імовірність виграти у другій грі дорівнює сумі ймовірностей подій 2.1), 2.2) і 2.3):

$$P_2 = \frac{64}{380} + \frac{64}{380} + \frac{12}{380} = \frac{140}{380}.$$

$P_2 > P_1$.

Відповідь: у другій грі.

9. В університеті працює студентське самоврядування, яке допомагає університету вирішувати навчальні та побутові проблеми. Самоврядування складається з 20 студентів, і щорічно обирає собі голову з 4-х кандидатів. Кожен із двадцятки голосує лише за одного кандидата. Наприкінці голосування члени самоврядування складають протокол, в якому записують кількість голосів кожного кандидата, але не вказують, хто за кого проголосував. Скільки різних варіантів протоколів може вийти?

Розв'язок

Нехай кожен студент кидає в урну для голосування білий листок із номером кандидата, за якого проголосував. Дістанемо всі аркуші й упорядкуємо за номерами кандидатів. Вийде кілька або жодного листків за першого, кілька або жодного за другого і так далі. Щоб відокремити листки кожного з кандидатів, вкладемо між ними чорний листок, навіть якщо за якогось кандидата ніхто не проголосував. Вийде три чорні розділові листки.

Число різних протоколів визначимо за формулою поєднань:

$$C_{23}^{3} = \frac{23!}{3!\,(23-3)!} = \frac{23!}{6 \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23}{6} = 1\ 771.$$

Відповідь: 1 771.